

穩健估計量在偵測 T^2 管制圖中 非隨機變異樣式之研究

潘浙楠* 陳曉倩

國立成功大學統計系

摘 要

鑑於傳統的 Hotelling's T^2 管制圖無法有效偵測製程中非隨機變異樣式 (Non-random patterns) 如趨勢 (trend)、製程平均移動 (process mean shift) 或出現離群值 (outliers) 等失控狀況。近年來，已有多位學者如 Holmes 及 Mergen、Sullivan 及 Woodall 等嘗試以穩健估計量 (robust estimation) 的方式建立 T^2 管制圖，雖可以有效地偵測趨勢、製程平均移動，但對離群值之偵測效果較差，而 Vargas 提出之穩健估計量固然可有效偵測離群值，但對趨勢、製程平均移動等偵測效果反較差。因此，在無法確知製程出現何種變異的情況下，實務工作者勢必同時使用兩個管制圖監控制程。然而，當製程呈穩定狀態下，同時使用兩個管制圖將使總誤警率 (overall false alarm rate) 增大。針對此一實際的考量，本研究結合上述兩種穩健估計量的優點提出一個新的穩健估計量，並以模擬的方式估計其製程失控時在不同變異下的偵測機率 (signal probability)。最後，我們以三個數值實例說明新的穩健估計量所建立之 T^2 管制圖可有效地偵測製程各種非隨機變異。

關鍵詞：多變量管制圖、非隨機變異樣式、偵測機率、總誤警率、穩健估計量。

1. 緒論

在統計製程管制中，當製程具有多個相關的品質特性時常使用多變量管制圖偵測製程是否失控。一般而言，建立多變量管制圖的第一階段 (Phase I) 為使用過去的資料估計製程參數並建立管制界限，而在第二階段 (Phase II) 我們則以第一階段建立的管制界限監控未來的製程。傳統 Hotelling's T^2 管制圖鑑於樣本平均數和樣本共變異數矩陣受到非隨機變異的影響，使得 T^2 管制圖在第一階段偵測非隨機變異的能力降低，而無法偵測出製程已出現失控的狀態。常見的非隨機變異包含製程平均出現向上或向下移動

* 聯絡作者：國立成功大學統計研究所，70101 台南市大學路 1 號。
E-mail: jnpan@mail.ncku.edu.tw

的趨勢 (trend)、製程平均突然改變稱為製程平均移動 (process mean shift) 或製程中有小部分不連續的觀測向量具有相同的平均移動量稱為離群值 (outliers)，Chan 及 Li (1994)、Holmes 及 Mergen (1993) 與 Vargas (2003) 分別對這三種情況提出討論。

相較於傳統 Hotelling's T^2 管制圖，部分學者以不易受到非隨機變異影響的估計量，這些估計量對非隨機變異較傳統估計量具穩健性，因此以穩健估計量建立的多變量管制圖在製程出現非隨機變異時較容易偵測出製程失控。Holmes 與 Mergen (1993) 提出以平均均方連續差 (mean square successive difference) 估計共變異數矩陣來建立多變量管制圖，並提及當製程呈現隨機變異時，平均均方連續差和樣本共變異數矩陣分別建立的管制圖其偵測結果非常接近；但是當製程出現趨勢、平均移動等非隨機變異時，兩種估計量所建立的管制圖其偵測結果會有所差異。Sullivan 與 Woodall (1996) 證明 Holmes 與 Mergen (1993) 提出平均均方連續差矩陣估計量之性質並以模擬方式估計多變量管制圖的偵測機率，彼等假設製程出現趨勢或平均移動時，利用樣本平均數和平均均方連續差矩陣所建立的多變量管制圖較 Hotelling's T^2 管制圖有效地偵測出製程失控。另外，在製程出現數個離群值時，Vargas (2003) 根據 Rousseeuw 和 van Zomeren (1990) 提出的最小橢體體積 (minimum volume ellipsoid, MVE) 估計量建立多變量管制圖較 Hotelling's T^2 管制圖有效地偵測出製程失控。依據 Vargas (2003) 文中不同穩健估計量所建立的多變量管制圖其比較結果，Jensen et al. (2007) 更進一步探討在不同離群值個數下以穩健估計量建立多變量管制圖的偵測能力。

由於 Holmes 與 Mergen (1993) 及 Sullivan 與 Woodall (1996) 使用的估計量所建立之多變量管制圖在製程呈現趨勢或製程平均移動時雖有效地偵測出製程失控，但在製程出現離群值時其偵測效果較差。反之，Vargas (2003) 以最小橢體體積所建立多變量管制圖固然有效地偵測離群值，但對趨勢、製程平均移動等偵測效果反較差。在無法確知製程出現何種變異情況下，實務工作者勢必採用兩個管制圖偵測製程變異，然而卻造成製程在穩定狀態下其總誤警率增大。因此，本研究結合 Holmes 與 Mergen (1993) 及 Vargas (2003) 所使用的穩健估計量之優點提出新的估計量，並在不同變異的情況下以模擬的結果，針對單一與同時使用二個多變量管制圖的偵測機率進行比較分析及探討。

2. 多變量管制圖之估計量及定義

假設 m 個 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)'$ 為獨立的隨機向量其分配為多變量常態，其中平均向量為 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ ， $\mu_k, k = 1, 2, \dots, p$ 為第 k 個品質特性的平均值， p 為品質特性個數，共變異數矩陣為 $\boldsymbol{\Sigma}$ 。一般而言，傳統 Hotelling's T^2 管制圖以樣本平均向量和樣本共變異數矩陣為估計量，其計算公式如下：

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{x}_j \quad \text{和} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})'$$

，其中 $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jp})'$ ， x_{jk} ， $j = 1, \dots, m$ ，為第 j^{th} 樣本中第 k^{th} 品質特性，而 Hotelling's T^2 統計量定義如下：

$$T^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

。然而 Hotelling's T^2 管制圖鑑於樣本平均數和樣本共變異數矩陣受到非隨機變異的影響，使得 Hotelling's T^2 管制圖在第一階段偵測非隨機變異的能力降低。因此，當製程出現趨勢和平均移動時，Holmes 與 Mergen (1993) 及 Sullivan 與 Woodall (1996) 建議使用平均均方連續差矩陣估計共變異數矩陣建立的 T^2 管制圖可有效地偵測出製程失控，此估計量定義如下：

$$\mathbf{S}_D = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{j=2}^m (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})'$$

， $\mathbf{S}_D$ 為對稱正定 (symmetric positive definite) 矩陣且為 Σ 的不偏估計量。以 $\bar{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{S}_D$ 所建立的 T^2 統計量定義如下：

$$T_D^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}_D^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

。當製程出現離群值時，Vargas (2003) 建議以最小橢圓體積估計量建立的多變量管制圖可有效地偵測出製程失控。而最小橢圓體積估計量定義為

$$\bar{\mathbf{x}}_{MVE} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m w_j} \sum_{j=1}^m w_j \mathbf{x}_j \quad \text{和} \quad \mathbf{S}_{MVE} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m w_j - 1} \sum_{j=1}^m w_j (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})'$$

，其中權重 w_j 值為 0 或 1，給定方式詳見 Rousseeuw 與 van Zomeren (1990)。以 $\bar{\mathbf{x}}_{MVE}$ 和 $\mathbf{S}_{MVE}$ 所建立的 T^2 統計量如下所示。

$$T_{MVE}^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_{MVE})' \mathbf{S}_{MVE}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_{MVE})$$

3. 研究方法

3.1 新的穩健估計量之建立

本研究結合 Holmes 與 Mergen (1993)、Sullivan 與 Woodall (1996) 及 Vargas (2003) 所提出穩健估計量之優點，以加權的樣本平均向量 (weighted sample mean vector) 估計樣本平均和加權的平均均方連續差矩陣 (weighted mean square successive difference matrix) 估計樣本共變異數為概念提出新的穩健估計量如式 (1) 所示。

$$\bar{\mathbf{x}}_w = \frac{1}{\sum_{j=1}^m w_j} \sum_{j=1}^m w_j \mathbf{x}_j \text{ 和 } \mathbf{S}_{wD} = \frac{1}{2 \sum_{j=2}^m w_j} \sum_{j=2}^m w_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})' \dots\dots\dots (1)$$

而權重 (為 0 或 1) 的給定方式係依據最小橢體體積估計量的計算過程，但須將此計算過程中的樣本共變異數矩陣換成平均均方連續差矩陣，以下為建立新的穩建估計量前給定權重的過程：

1. 隨機抽取 $(p+1)$ 個不同的觀察向量， $J = \{j_1, j_2, \dots, j_{p+1}\}$ ， $j = 2, \dots, m$ 。
2. 計算樣本平均向量和平均均方連續差矩陣：

$$\bar{\mathbf{x}}_J = \frac{1}{p+1} \sum_{j \in J} \mathbf{x}_j \text{ 和 } \mathbf{S}_{D,J} = \frac{1}{2(p+1)} \sum_{j \in J} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})'$$

，因樣本數大於品質特性個數，故 $\mathbf{S}_{D,J}$ 仍為對稱正定矩陣。

3. 以 $\bar{\mathbf{x}}_J$ 和 $\mathbf{S}_{D,J}$ 計算平方距離：

$$T_{J,j}^2 = (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_J)' \mathbf{S}_{D,J}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_J), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

。將 $T_{J,j}^2$ 排序後取第 h^{th} 個， $h = [(m+p+1)/2]$ ， $[\]$ 為高斯符號， $T_{J,(h)}^2$ 為放大倍率因子。

4. 因橢體體積與式(3)的 $\mathbf{S}_{ID}$ 行列式值開根號後成正比 (詳見 Seber 與 Wild, 1989, p. 679)，且 $\det(\mathbf{S}_{ID})$ 又與 $\det(T_{J,(h)}^2 \mathbf{S}_{D,J})$ 成正比，故橢體體積與式 (2) 成正比。

$$\sqrt{(T_{J,(h)}^2)^p \det(\mathbf{S}_{D,J})} \dots\dots\dots (2)$$

5. 重覆 1 到 4 步驟 $\min(C_{p+1}^{m-1}, 1500)$ 次，其中 1500 次是依據 Rousseeuw 與 Leroy (2003, p199) 的建議。選取式 (2) 中最小的值所對應的 J 為最佳子集合 J^* 。
6. 依據第 5 步驟得到的最佳子集合 J^* ，計算初步之估計量：

$$\bar{\mathbf{x}}_I = \bar{\mathbf{x}}_{J^*} \text{ 和 } \mathbf{S}_{ID} = \hat{c}_{m,p}^2 \mathbf{S}_{D,J^*} T_{J^*,(h)}^2 m(m-1)^{-2} (B(0.5; p/2, (f-p-1)/2))^{-1} \dots\dots\dots (3)$$

，其中 $\hat{c}_{m,p}^2 = (1.1149 + 12.1246/(m-p))^2$ 為新的修正因子 (參考 Rousseeuw 和 van Zomeren (1990, 1991) 及 Castaño-Tostado (2000) 之方法並模擬 1000 次的結果)， $B(0.5; d_1, d_2)$ 為 Beta 分配的第 50 個百分位數其自由度為 d_1 和 d_2 。Rousseeuw 和 van Zomeren (1990) 假設大多數的隨機變量均具有相同的多變量常態分配，在求算最小體積估計量時 Hotelling's T^2 統計量會漸近卡方分配。由於本研究將最小橢體體積方法中樣本共變異數矩陣更改為平均均方連續差矩陣，並依據 Sullivan 和 Woodall (1996) 提出以 $\bar{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{S}_D$ 建立 T_D^2 統計量的漸近分配為 $m^{-1}(m-1)^2 B(p/2, (f-p-1)/2)$ ，因此更換後的計算公式如式(3)所示。

接著，取 $m^{-1}(m-1)^2 B(p/2, (f-p-1)/2)$ 的第 97.5 個百分位數為界限，以式 (3) 之估計量計算平方距離

$$T_{ID,j}^2 = (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_I)' \mathbf{S}_{ID}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_I), \quad j=1, 2, \dots, m$$

，若第 j 個平方距離超出此界限則所對應的觀測向量其權重為 0，其餘權重則為 1，權重可寫成式 (4)。

$$w_j = \begin{cases} 1, & T_{ID,j}^2 \leq m^{-1}(m-1)^2 B(0.975; p/2, (f-p-1)/2) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

依式 (4) 的權重及式 (1) 可得本研究提出的 $\bar{\mathbf{x}}_W$ 和 $\mathbf{S}_{WD}$ 所建立的 T^2 統計量如下所示。

$$T_{WD}^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_W)' (\mathbf{S}_{WD})^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_W)$$

3.2 管制界限之建立

若製程呈穩定狀態下其製程分配為多變量常態，且統計量 $T^2 = (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\mu}})$ 對 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 具有不變性，因此假設製程平均為零向量 ($\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$) 且共變異數矩陣為單位矩陣 ($\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$)。在總誤警率為 α 時，可由式 (5) 決定多變量管制圖的管制界限 c_α 。

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= p\left(\bigcap_{j=1}^m \{T_j^2 \leq c_\alpha \mid \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}\}\right) \\ &= p(\max_{1 \leq j \leq m} T_j^2 \leq c_\alpha \mid \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}) \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

我們以模擬的方式依據式 (5) 計算各個多變量管制圖之管制界限其過程如圖 1。表 1 為在不同樣本數 (m) 和品質特性個數 (p) 組合下，建立 Hotelling's T^2 、 T_D^2 、 T_{MVE}^2 和 T_{WD}^2 多變量管制圖的 95% 管制界限。

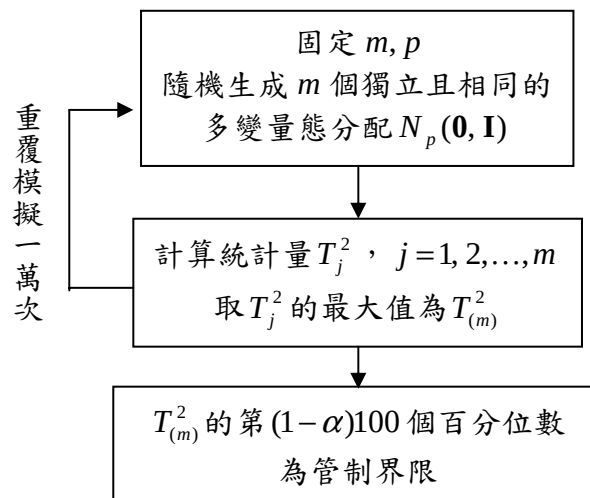


圖 1 建立多變量管制圖的 $(1-\alpha)100\%$ 管制界限流程圖

表 1 在不同樣本數和品質特性個數組合下，以模擬方式估計 T^2 、 T_D^2 、 T_{MVE}^2 及 T_{WD}^2 管制圖的 95%管制界限

m	p	T^2	T_D^2	T_{MVE}^2	T_{WD}^2
30	2	10.5	12.2	24.5	16.6
	5	14.8	20.1	39.5	28.6
50	2	12.1	13.3	21.5	16.3
	5	17.3	20.6	31.8	25.8
100	2	14.2	14.8	20.5	17.0
	5	20.3	21.9	29.2	25.1

表 2 不同樣本數和品質特性個數組合下，以模擬方式估計 T_{WD}^2 管制圖的 $(1-\alpha^*)100\%$ 管制界限

m	$p = 2$			$p = 5$		
	30	50	100	30	50	100
α^*	0.09	0.08	0.08	0.09	0.08	0.08
Control limit	14.6	15.1	15.8	25.3	24.1	23.5

3.3 兩個多變量管制圖的總誤警率

在無法確知製程出現何種變異情況下，實務工作者勢必採用 T_D^2 和 T_{MVE}^2 兩個管制圖偵測製程變異，然而其總誤警率在製程呈穩定狀態下會比使用單一管制圖的總誤警率高，因此我們考慮同時使用 T_D^2 和 T_{MVE}^2 兩個管制圖，總誤警率的模擬計算過程如下：

1. 固定樣本數 (m) 和品質特性個數 (p) 下，隨機生成 m 個獨立且相同的多變量態分配 $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ 。
2. T_D^2 和 T_{MVE}^2 其中一個多變量管制圖只要有點超出管制界限即視為此製程失控。
3. 重複 1-2 的步驟 1 萬次。
4. 計算在 1 萬次中使用兩個多變量管制圖偵測出製程失控的次數及比例。

本研究將 T_D^2 和 T_{MVE}^2 兩個管制圖的總誤警率皆固定為 0.05 下，依上述步驟可得同時使用 T_D^2 及 T_{MVE}^2 兩個管制圖所估計的總誤警率為 α^* ，再依據 3.3 節計算 T_{WD}^2 管制圖的 $(1-\alpha^*)100\%$ 管制界限其結果如表 2 表 2。以下為針對表 2 表 2 之說明，當樣本數 (m) 為 30 且品質特性個數 (p) 為 2 時，在固定總誤警率為 0.05 下， T_D^2 和 T_{MVE}^2 管制圖的 95% 管制界限分別為 12.2 和 24.5，若同時使用此兩個管制圖其總誤警率為 0.09，而 T_{WD}^2 管制圖對照表 2 之 91% 管制界限為 14.6，因此這兩種方法具有相同的總誤警率為 α^* 。

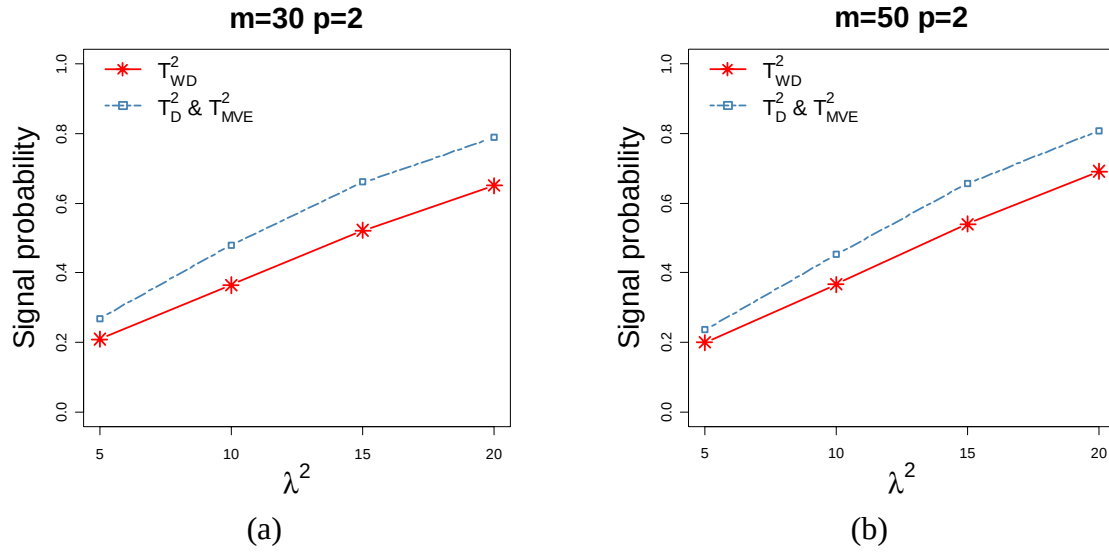


圖 2 樣本數為 (a) 30 和 (b) 50、品質特性個數為 2、製程為趨勢且移動量為 λ^2 之組合， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率

4. 模擬研究結果

在製程呈失控狀態下，我們假設製程服從多變量常態分配其共變異數矩陣為單位矩陣，但製程平均向量由 $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)'$ 改變至 $\boldsymbol{\mu}_1$ ，因而出現非隨機變異如趨勢、製程平均移動或離群值。設 $\boldsymbol{\mu}_1$ 為 $(\lambda, 0, \dots, 0)'$ 則移動量 λ^2 為 T^2 的非中心參數。為了比較使用單一 T_{WD}^2 管制圖和同時使用 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的偵測能力，本研究以一萬次的模擬結果來估計偵測機率（將兩誤警率固定相同），並在出現趨勢、平均移動及離群值情形下，針對兩種方法進行比較，結果如下：

I 趨勢

由於工具磨損或工作疲勞等因素，使製程平均緩慢地向上或向下移動稱為製程出現趨勢，我們將製程平均呈線性移動定義為：

$$\boldsymbol{\mu}'_j = \frac{j-1}{m-1} \boldsymbol{\mu}_1, \quad j = 1, \dots, 30$$

，其中 $\boldsymbol{\mu}_1 = (\lambda, 0, \dots, 0)'$ 為第 30 個平均向量 ($\boldsymbol{\mu}'_{30}$) 和第 1 個平均向量 ($\boldsymbol{\mu}'_1 = \mathbf{0}$) 的差。因此隨機變量 $\mathbf{x}_j$, $j = 1, \dots, 30$ 為獨立具有相同分配為 $N_p(\boldsymbol{\mu}'_j, \mathbf{I})$ 。圖 2 為不同樣本數(m)、品質特性個數 (p)、製程出現趨勢且移動量 (λ^2) 的組合下， T_{WD}^2 管制圖和使用 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的偵測機率。由圖 2 可知同時以 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的偵測機率略高於 T_{WD}^2 管制圖的偵測機率，在品質特性個數為 2 且固定移動量 (λ^2) 下，隨著樣本數由 30 增

加至 50 時，兩者之間的差距相對地減小，例如移動量為 20 時，樣本數由 30 增加至 50 時其差距由 0.139 減少至 0.116。

II 製程平均移動

製程平均移動產生的原因可能為新員工的引進、方法、原料或機器等。當製程平均在最後 $m^* = 3$ 個由 $\mathbf{0}$ 平移至 μ_1 ，如下列所示：

$$\mu_j = \begin{cases} \mathbf{0}, & j = 1, 2, \dots, m - m^* \\ \mu_1, & j = m - m^* + 1, \dots, m \end{cases}$$

。圖 3 為不同樣本數 (m)、品質特性個數 (p)、最後 3 個製程平均移動且移動量 (λ^2) 的組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率。由圖 3 (a) 中可知當移動量 (λ^2) 為 5 時， T_{WD}^2 管制圖和同時使用 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的偵測機率相差 0.007，而 (b) 圖中兩種方法的偵測機率相差 0.008。當移動量為 10、15 及 20 時， T_{WD}^2 管制圖和同時使用 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖其偵測機率皆相差在 0.004 以內。

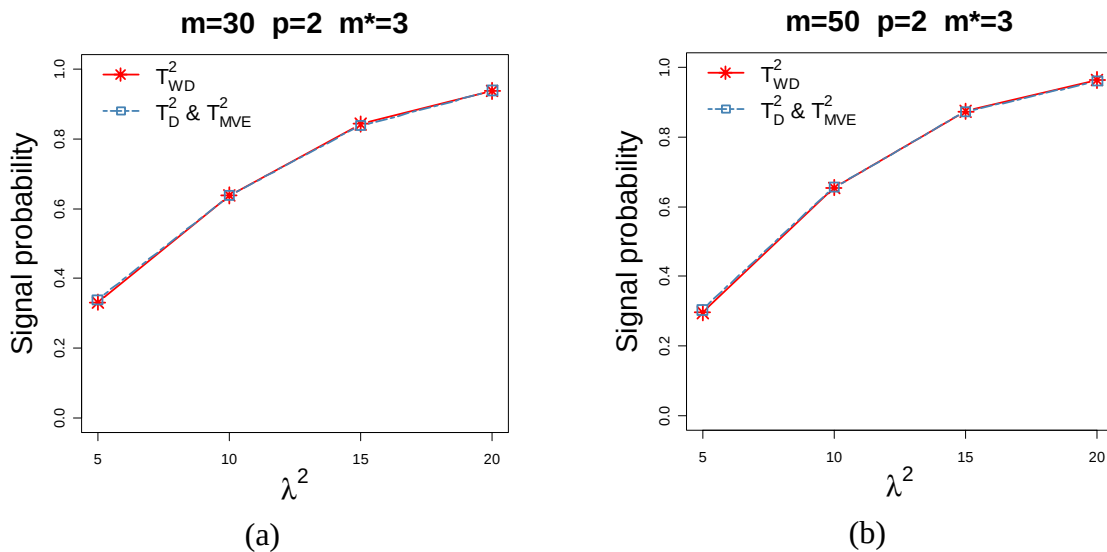


圖 3 樣本數為 (a) 30 和 (b) 50、品質特性個數為 2、最後 3 個製程平均移動且移動量為 λ^2 的組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率

III 離群值

由可歸屬原因產生小部分不連續的觀測向量具有相同的平均移動量稱為離群值，樣本數 (m) 中隨機選取 m^* 個離群值其製程平均移動由 $\mathbf{0}$ 改變至 μ_1 。圖 4 表示製程出現 3

個離群值，不同樣本數 (m)、品質特性個數 (p)、製程平均移動量 (λ^2) 組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率。圖 4 (a) 中，隨著製程平均移動量增加至 20， T_{WD}^2 管制圖和同時以 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖其偵測機率差異為 0.082，而在圖 4 (b) 中兩種方法的偵測機率差異為 0.046。當品質特性個數為 2 且離群值個數為 3 的情況下，若樣本數增加至 50， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖其偵測機率差異變小。

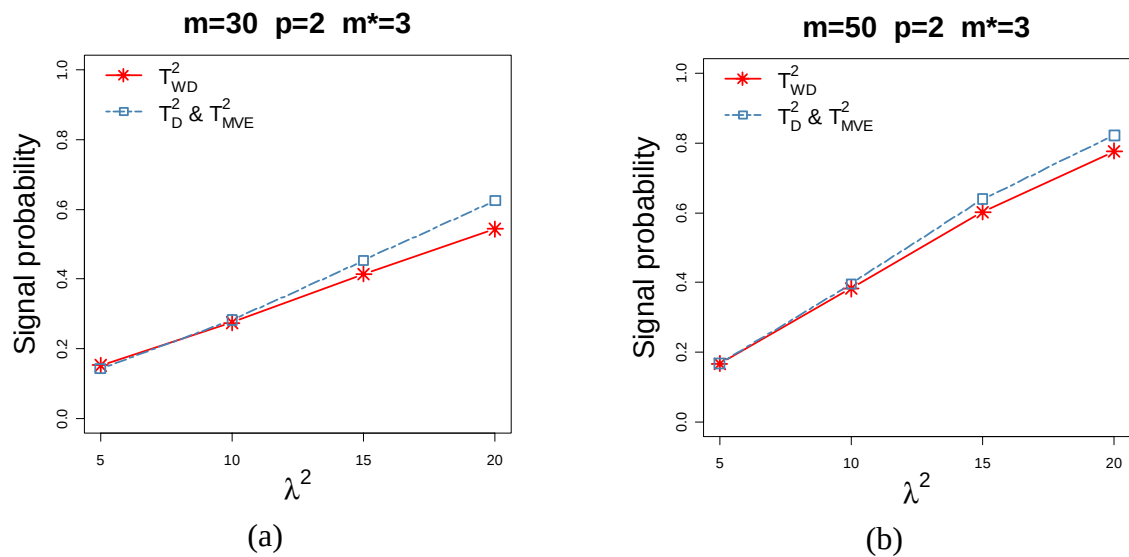


圖 4 樣本數為 (a) 30 和 (b) 50、品質特性個數為 2、3 個離群值且移動量為 λ^2 的組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率

表 3 不同樣本數、品質特性個數、製程為趨勢且移動量為 λ^2 的組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率

m	50						100					
	2			5			2			5		
λ^2	WD	D-MVE	差	WD	D-MVE	差	WD	D-MVE	差	WD	D-MVE	差
5	0.200	0.237	-0.037	0.135	0.173	-0.038	0.224	0.218	0.006	0.159	0.152	0.007
10	0.367	0.453	-0.086	0.223	0.322	-0.099	0.418	0.450	-0.032	0.276	0.293	-0.017
15	0.540	0.656	-0.116	0.336	0.487	-0.151	0.626	0.684	-0.058	0.415	0.470	-0.055
20	0.691	0.807	-0.116	0.459	0.635	-0.176	0.786	0.843	-0.057	0.567	0.641	-0.074

註：“WD”為 T_{WD}^2 管制圖，“D-MVE”為 T_D^2 和 T_{MVE}^2 兩個管制圖，“差”代表 WD 和 D-MVE 偵測機率值之差。

由於樣本數為 30 和 50 及 100 有相似的結果，因此我們僅列出樣本數為 50 和 100

在不同樣本數 (m)、品質特性個數 (p)、製程移動量 (λ^2) 的組合。表 3 為樣本數 (m)、品質特性個數 (p)、製程為趨勢且移動量為 λ^2 的組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率。就兩種方法其偵測機率的差異而言，在固定品質特性個數 (p)、移動量 (λ^2) 下，樣本數由 50 增加至 100 時， T_{WD}^2 管制圖與 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率差異變小，亦即當樣本數增加 T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的偵測機率愈接近。

表 4 為樣本數 (m)、品質特性個數 (p)、最後 m^* 個製程平均移動且移動量為 λ^2 的不同組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率。當樣本數為 50、品質特性個數為 5、最後 5 個樣本製程平均移動量為 10， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率差異為 0.054；其他樣本數 (m)、品質特性個數 (p)、移動量 (λ^2) 下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率非常接近，其差異皆在 0.03 內。當樣本數由 50 增加至 100 時， T_{WD}^2 管制圖的偵測機率略高於和 T_D^2 & T_{MVE}^2 的偵測機率。

表 4 不同樣本數、品質特性個數、最後 m^* 個製程平均移動且移動量為 λ^2 的組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率

m		50							100						
p		2			5				2			5			
m^*	λ^2	WD	D-MVE	差	WD	D-MVE	差		WD	D-MVE	差	WD	D-MVE	差	
1	5	0.175	0.166	0.009	0.134	0.134	0.000		0.159	0.144	0.015	0.122	0.111	0.011	
	10	0.393	0.374	0.019	0.270	0.263	0.007		0.359	0.331	0.028	0.246	0.223	0.023	
	15	0.615	0.592	0.023	0.439	0.425	0.014		0.587	0.560	0.027	0.422	0.394	0.028	
	20	0.789	0.771	0.018	0.611	0.594	0.017		0.767	0.752	0.015	0.608	0.577	0.031	
3	5	0.296	0.304	-0.008	0.196	0.219	-0.023		0.273	0.258	0.015	0.182	0.173	0.009	
	10	0.654	0.656	-0.002	0.446	0.479	-0.033		0.644	0.623	0.021	0.446	0.438	0.008	
	15	0.873	0.872	0.001	0.696	0.724	-0.028		0.887	0.875	0.012	0.725	0.719	0.006	
	20	0.963	0.960	0.003	0.851	0.870	-0.019		0.973	0.969	0.004	0.895	0.892	0.003	
5	5	0.370	0.378	-0.008	0.237	0.266	-0.029		0.356	0.339	0.017	0.229	0.219	0.010	
	10	0.751	0.755	-0.004	0.526	0.580	-0.054		0.777	0.757	0.020	0.563	0.557	0.006	
	15	0.933	0.930	0.003	0.768	0.806	-0.038		0.956	0.949	0.007	0.838	0.838	0.000	
	20	0.985	0.986	-0.001	0.906	0.928	-0.022		0.994	0.993	0.001	0.958	0.957	0.001	

表 5 不同樣本數、品質特性個數、離群值個數 (m^*) 且移動量為 λ^2 的組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖偵測機率

m		50							100						
p		2			5				2			5			
m^*	λ^2	WD	D-MVE	差	WD	D-MVE	差		WD	D-MVE	差	WD	D-MVE	差	
1	5	0.139	0.141	-0.002	0.099	0.109	-0.010		0.137	0.129	0.008	0.103	0.099	0.004	
	10	0.302	0.302	0.000	0.171	0.186	-0.015		0.309	0.294	0.015	0.186	0.183	0.003	
	15	0.512	0.514	-0.002	0.286	0.315	-0.029		0.532	0.520	0.012	0.337	0.333	0.004	
	20	0.692	0.698	-0.006	0.432	0.466	-0.034		0.731	0.722	0.009	0.511	0.512	-0.001	
3	5	0.168	0.169	-0.001	0.101	0.120	-0.019		0.196	0.185	0.011	0.130	0.122	0.008	
	10	0.383	0.396	-0.013	0.181	0.215	-0.034		0.480	0.472	0.008	0.264	0.267	-0.003	
	15	0.602	0.639	-0.037	0.289	0.356	-0.067		0.755	0.759	-0.004	0.462	0.489	-0.027	
	20	0.776	0.822	-0.046	0.404	0.517	-0.113		0.915	0.919	-0.004	0.661	0.704	-0.043	
5	5	0.157	0.161	-0.004	0.099	0.114	-0.015		0.216	0.208	0.008	0.130	0.123	0.007	
	10	0.320	0.369	-0.049	0.146	0.180	-0.034		0.512	0.529	-0.017	0.258	0.274	-0.016	
	15	0.502	0.624	-0.122	0.205	0.300	-0.095		0.782	0.829	-0.047	0.439	0.503	-0.064	
	20	0.655	0.808	-0.153	0.275	0.437	-0.162		0.929	0.960	-0.031	0.625	0.729	-0.104	

表 5 為不同樣本數 (m)、品質特性個數 (p)、離群值個數 (m^*) 且移動量為 λ^2 的組合下， T_{WD}^2 管制圖和 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖的偵測機率。樣本數為 50 時， T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的偵測能力略高於使用單一 T_{WD}^2 管制圖。隨著樣本數增加至 100 時， T_{WD}^2 管制圖的偵測機率接近 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的偵測機率。接著比較兩種方法之差異，固定樣本數 (m)、品質特性個數 (p)、離群值個數為 3 及 5 個時， T_{WD}^2 管制圖差隨著移動量減少與 T_D^2 & T_{MVE}^2 管制圖之差異變小。

由表 3 至表 5 的結果發現，當非隨機變異在樣本數 (m) 為 30、50 和 100，品質特性個數 (p) 為 2 和 5 組合下，製程出現趨勢時， T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖偵測機率略高於 T_{WD}^2 管制圖的偵測機率高，但隨著移動量 (λ^2) 及樣本數 (m) 增加，兩種方法的偵測機率差異會變小；製程出現平均移動時，樣本數為 50 的情況下兩種方法其偵測機率非常接近，當樣本數增加至 100 時，使用一個管制圖偵測機率略高於兩個管制圖。製程出現離群值時，樣本數增加的情況下兩種方法的偵測機率差異會變小。在各種不同變異所造成的失控情況下，我們發現製程使用單一 T_{WD}^2 管制圖和同時使用 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的偵測機率雖然略有差異，對實務工作者而言使用單一 T_{WD}^2 管制圖卻比較容易方便。

5. 數值實例

接著，我們將以數值實例資料為例說明 Hotelling's T^2 、 T_D^2 、 T_{MVE}^2 及 T_{WD}^2 各個管制圖在製程出現趨勢、平均移動或離群值的偵測情形。

5.1 例 1—製程出現趨勢

Chan 與 Li (1994) 文中假定製程出現趨勢其平均向量 μ_j 為 $(0.15(j-1), 0)'$ (其移動量 λ^2 為 4.35)，則製程出現趨勢的模式為

$$\mathbf{x}_j \stackrel{i.i.d.}{\sim} N_2(\mu_j, \mathbf{I}), \mu_j = (0.15(j-1), 0)'$$

，其中 $\mathbf{x}_j = (x_1, x_2)'$ 為第 j^{th} 個觀察值， $x_k, k=1, 2$ 為第 k^{th} 個品質特性， $\mathbf{I}$ 為單位矩陣，今隨機產生 30 筆為二變量常態分配的資料如表 6 中第 2 到 3 行所示。在計算每個觀察值的平方距離值 $(\mathbf{x}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_j - \mu)$ 之前，我們須估計 μ 和 Σ 其方法分別為：(i) 傳統 Hotelling's T^2 管制圖以樣本平均向量和樣本共變異矩陣為估計量，其估計值如下：

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2.054 \\ 0.013 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3.381 & 0.471 \\ 0.471 & 0.728 \end{bmatrix}$$

表 6 製程出現趨勢的資料及在不同估計量下每個觀察值的平方距離值

j	x_1	x_2	T^2	T_D^2	T_{MVE}^2	T_{WD}^2
1	-0.25	-0.64	1.74	6.37	1.67	6.15
2	-1.08	-0.65	2.98	11.88	2.78	11.58
3	0.95	0.53	1.04	2.69	1.02	2.49
4	-1.11	0.29	3.74	14.50	3.82	14.46
5	-0.05	0.02	1.45	5.97	1.33	5.63
6	-0.09	0.31	1.90	6.99	1.87	6.75
7	0.90	-0.40	0.49	1.61	0.53	1.52
8	0.39	0.04	0.92	3.77	0.81	3.44
9	2.39	0.56	0.41	0.49	0.32	0.47
10	0.63	-0.27	0.61	2.46	0.56	2.23
11	2.16	0.26	0.08	0.10	0.03	0.06
12	1.44	0.94	1.66	2.59	1.76	2.63
13	3.41	-0.65	1.64	4.16	2.69	5.88
14	2.62	-0.42	0.49	1.01	0.97	1.76
15	0.15	-1.84	4.88	7.32	6.16	9.00
16	1.77	0.36	0.25	0.42	0.17	0.27
17	1.31	1.11	2.34	3.68	2.59	3.89

j	x_1	x_2	T^2	T_D^2	T_{MVE}^2	T_{WD}^2
18	2.29	-1.49	3.58	4.39	5.49	6.99
19	1.69	-1.53	3.40	3.78	5.04	5.93
20	2.69	0.67	0.61	0.88	0.50	0.93
21	3.82	0.65	1.15	3.77	1.07	4.24
22	4.14	0.92	1.86	5.38	1.69	5.92
23	3.49	1.00	1.54	3.04	1.40	3.34
24	2.84	-0.81	1.50	2.67	2.54	4.23
25	2.45	0.06	0.05	0.20	0.11	0.37
26	2.60	-0.27	0.28	0.70	0.61	1.25
27	4.11	1.41	3.11	6.19	2.94	6.78
28	5.68	0.84	4.04	15.85	3.98	17.35
29	6.13	0.72	4.94	20.31	5.05	22.30
30	4.16	-1.32	5.31	11.93	8.04	16.11
CL			10.5	12.2	24.5	16.6

註：CL 表示 T^2 、 T_D^2 、 T_{MVE}^2 和 T_{WD}^2 管制圖的 95%管制界限。

(ii) Holmes 及 Mergen (1993) 與 Sullivan 及 Woodall (1996) 建議以樣本平均向量和平均均方連續差矩陣建立 T_D^2 管制圖，其估計值如下：

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2.054 \\ 0.013 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{S}_D = \begin{bmatrix} 0.834 & 0.241 \\ 0.241 & 0.641 \end{bmatrix}$$

(iii) Vargas (2003) 建議以最小橢圓體積估計量建立 T_{MVE}^2 管制圖，其估計值如下：

$$\bar{\mathbf{x}}_{MVE} = \begin{bmatrix} 1.971 \\ 0.115 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{S}_{MVE} = \begin{bmatrix} 3.458 & 0.631 \\ 0.631 & 0.621 \end{bmatrix}$$

(iv) 本研究所提以加權樣本平均向量和加權平均均方連續差矩陣，其估計值如下：

$$\bar{\mathbf{x}}_W = \begin{bmatrix} 1.971 \\ 0.115 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{S}_{WD} = \begin{bmatrix} 0.806 & 0.232 \\ 0.232 & 0.486 \end{bmatrix}。$$

我們依據上述的估計值，以製程出現趨勢的資料在不同估計量下計算每個觀測值的平方距離其統計量分別為 T^2 、 T_D^2 、 T_{MVE}^2 和 T_{WD}^2 ，結果詳見表 6 的第 3 到 7 行。在固定總誤警率為 0.05 下，樣本數 (m) 為 30、品質特性個數 (p) 為 2 時由表 1 得知使用 Hotelling's T^2 、 T_D^2 、 T_{MVE}^2 和 T_{WD}^2 管制圖的 95%管制界限分別為 10.5、12.2、24.5 和 16.6。由圖 5 發現 (b) 及 (d) 有點落在管制界限外，而 (a) 及 (c) 沒有任何一點落在管制界限外，由此可知在製程出現趨勢情況下，使用 T_D^2 和 T_{WD}^2 管制圖可偵測出該製程失控，而使用 Hotelling's T^2 和 T_{MVE}^2 管制圖所判斷的結果為製程在管制狀態中。

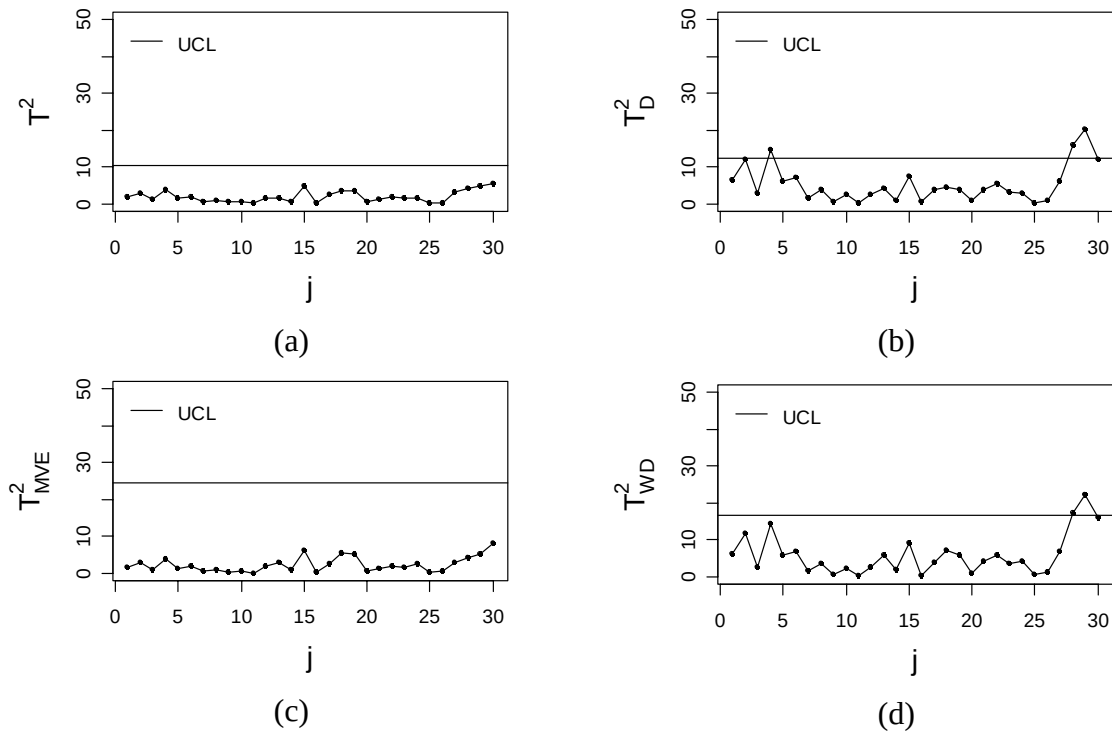


圖 5 (a) 傳統估計量 (b) Sullivan 和 Woodall 建議的估計量 (c) 最小橢圓體積估計量 (d) 新的穩健估計量建立多變量管制圖偵測模擬製程出現趨勢的資料。

5.2 例 2—製程平均移動

Sullivan 和 Woodall (1996) 發現 Holmes 和 Mergen (1993) 所舉的歐洲工廠石礫分佈實例之前 24 個觀測值和後 32 個觀測值其平均有所差異，其散佈圖如圖 6 所示。該實例中石礫分佈之變數為大、中、小，由於三個變數之比例總合為 100% 為線性相依，因此我們只取大 (x_1) 和中 (x_2) 兩個為品質特性。在固定總誤警率為 0.05 下，樣本數 (m) 為 56、品質特性個數 (p) 為 2 時使用 Hotelling's T^2 、 T_D^2 、 T_{MVE}^2 和 T_{WD}^2 管制圖的 95% 管制界限分別為 12.6、13.6、21.4 和 16.6。由圖 7 (b) 及 (d) 發現有點落在管制界限外，而 (a) 及 (c) 沒有任何一點落在管制界限外，由此可知製程出現平均移動時，使用 T_D^2 和 T_{WD}^2 管制圖可偵測出該製程失控，而使用 Hotelling's T^2 和 T_{MVE}^2 管制圖所判斷的結果為製程在管制狀態中。

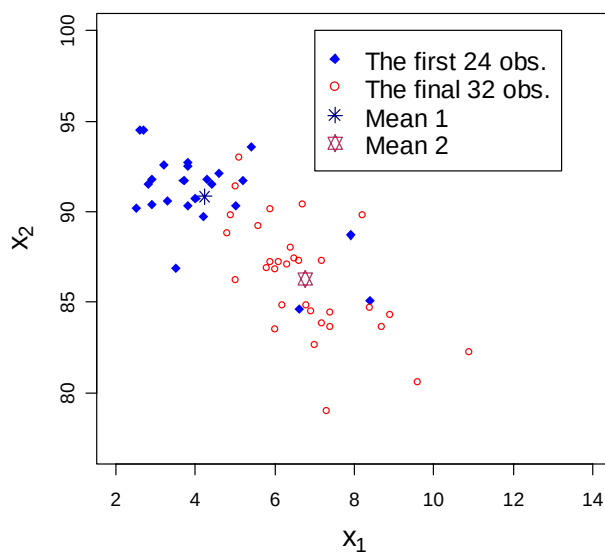


圖 6 歐洲工廠石礫散佈圖

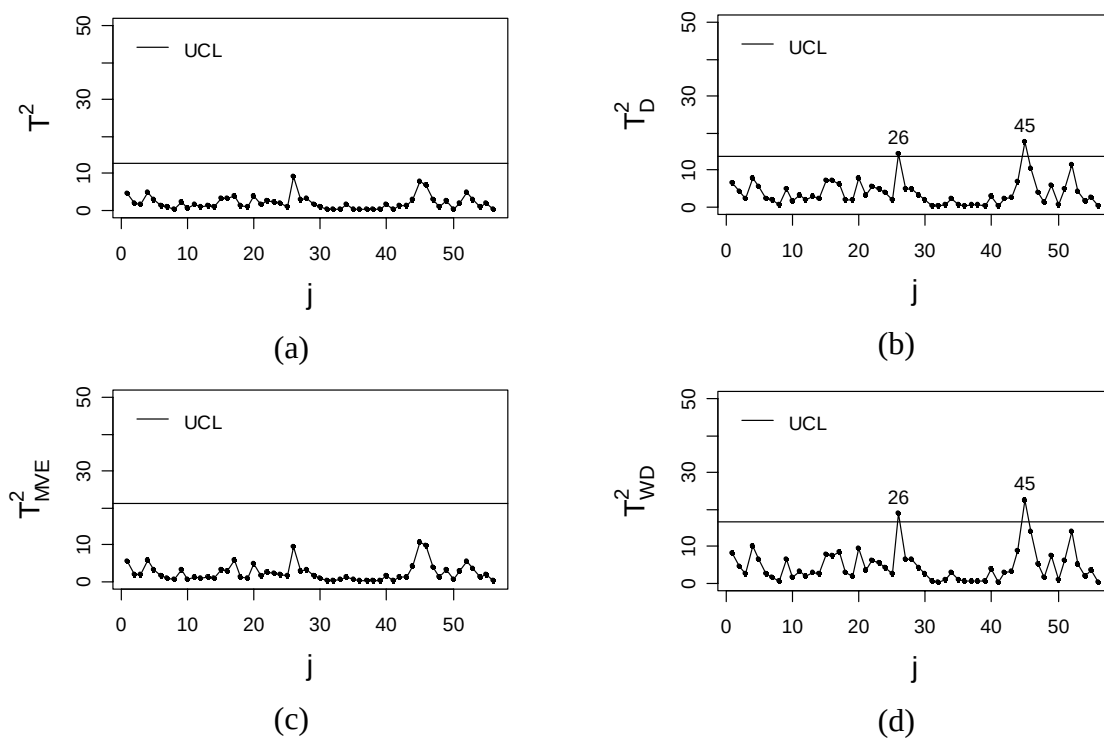


圖 7 (a) 傳統估計量 (b) Sullivan 和 Woodall 建議的估計量(c) 最小橢圓體體積估計量(d) 新的穩健估計量建立多變量管制圖偵測石礫分佈資料。

5.3 例 3—製程離群值

Vargas (2003) 針對 Quesenberry (2001) 實例中的前兩個變數分別為 x_1 和 x_2 ，並且修改其中第 16 和 24 觀測值為離群值，使資料由原本的一個離群值變成三個離群值，其散

佈圖如圖 8 所示。在固定總誤警率為 0.05 下，樣本數 (m) 為 30、品質特性個數 (p) 為 2 時，使用 Hotelling's T^2 、 T_D^2 、 T_{MVE}^2 和 T_{WD}^2 管制圖的 95%管制界限分別為 10.5、12.2、24.5 和 16.6。由圖 9 (c) 及 (d) 發現有點落在管制界限外，而 (a) 及 (b) 沒有任何一點落在管制界限外。由此可知在製程出現離群值時， T_{MVE}^2 和 T_{WD}^2 管制圖可偵測出該製程失控，而使用 Hotelling's T^2 和 T_D^2 管制圖所判斷的結果為製程在管制狀態中。

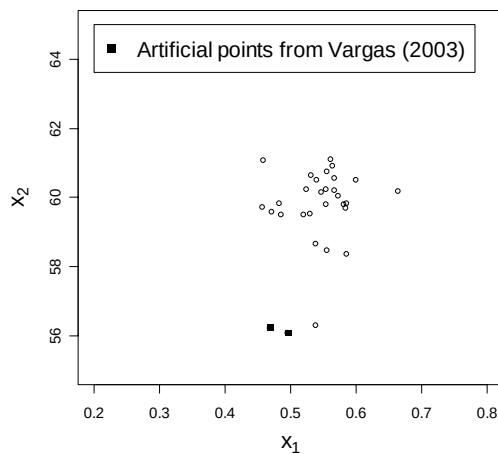


圖 8 製程出現離群值的資料

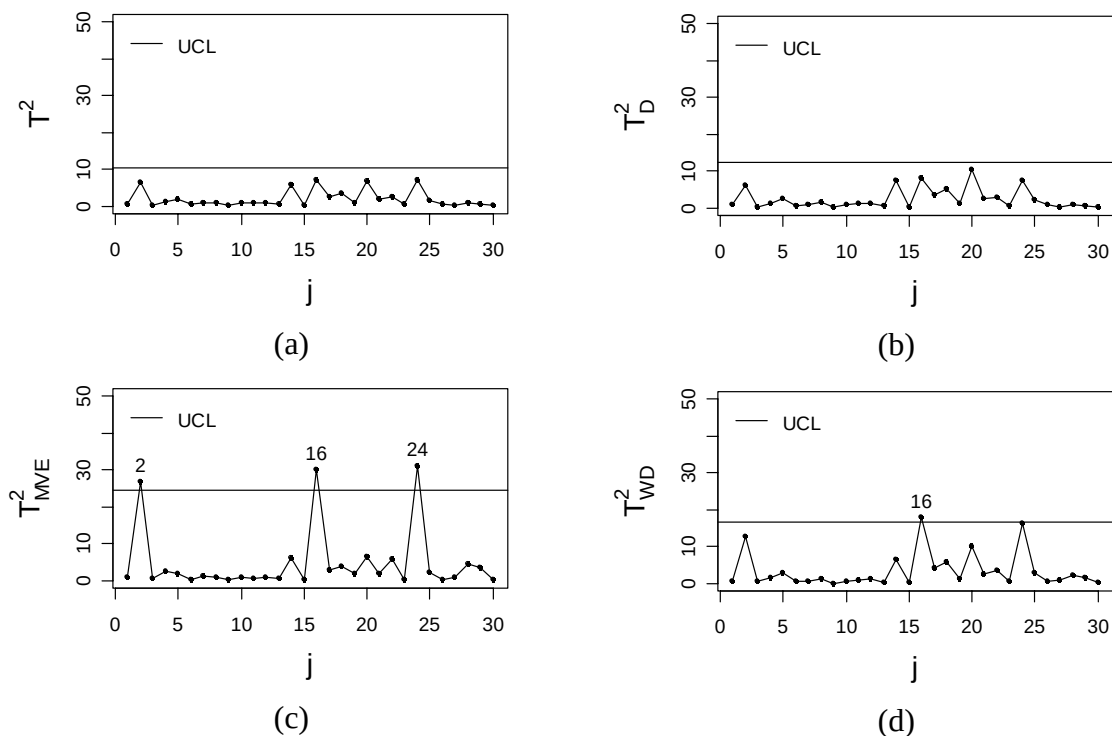


圖 9 (a) 傳統估計量 (b) Sullivan 和 Woodall 建議的估計量 (c) 最小橢圓體體積估計量 (d) 新的穩健估計量建立多變量管制圖偵測製程出現離群值的資料。

經由上述三個實例的結果可知，前兩個例子中(製程出現趨勢及平均移動) 使用 T_D^2 和 T_{WD}^2 管制圖可偵測出製程失控，而使用 Hotelling's T^2 和 T_{MVE}^2 管制圖所判斷的結果為製程在管制中。另外，在第三個例子中 (製程存在離群值) 使用 T_{MVE}^2 和 T_{WD}^2 管制圖可偵測出製程失控，而使用 Hotelling's T^2 和 T_D^2 管制圖所判斷的結果為製程在管制中。因此，在無法確知製程出現何種變異情況下，使用本研究所建立的 T_{WD}^2 管制圖在製程出現各種非隨機變異時可偵測出製程已失控，亦較同時使用兩個多變量管制圖偵測製程簡易方便。

6. 結論

傳統 Hotelling's T^2 管制圖係以樣本平均向量和樣本共變異數矩陣估計製程參數 μ 和 Σ 。鑑於這些估計量可能會受到非隨機變異如趨勢、製程平均移動及離群值的影響，使得 T^2 管制圖在偵測非隨機變異的能力降低，而無法偵測出製程已出現失控的狀態。Holmes 與 Mergen (1993) 及 Sullivan 與 Woodall (1996) 建議使用樣本平均向量和平均均方連續差矩陣分別估計 μ 和 Σ 建立 T^2 管制圖，當製程出現趨勢和製程平均移動時，雖可以有效地偵測趨勢、製程平均移動，但對離群值之偵測效果較差，而 Vargas (2003) 提出之穩健估計量固然可有效偵測離群值，但對趨勢、製程平均移動等偵測效果反較差。在無法確知製程出現何種變異情況下，實務工作者勢必採用兩個管制圖偵測製程變異，然而卻造成製程在穩定狀態其總誤警率較大。因此，本研究將總誤警率固定為 0.05 下，提出新穩健估計量所建立新的 T_{WD}^2 管制圖，並以模擬的方式說明當製程呈穩定狀態下同時使用 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的總誤警率將增加至 α^* ，再依據 α^* 計算 T_{WD}^2 管制圖的管制界限。我們發現製程在呈各種不同變異所造成的失控情況下，使用單一 T_{WD}^2 管制圖和同時使用 T_D^2 & T_{MVE}^2 兩個管制圖的偵測機率其結果相當接近。因此，在無法確知製程將出現何種變異的情況下，本研究提出新穩健估計量所建立的單一 T_{WD}^2 管制圖會比同時使用兩個管制圖簡易方便。

參考文獻

1. Castaño-Tostado E.. "Small Sample Correction Factor of the Minimum Covariance Determinant Estimator". *Communications in Statistics Simulation and Computation*, 29, 4, pp. 1273-1283 (2000).
2. Chan, L. K. and Li, G. Y.. "A Multivariate Control Chart for Detecting Linear Trends". *Communications in Statistics Simulation and Computation*, 23, 4, pp. 997-1012 (1994).
3. Holmes, D. S. and Mergen, A. E.. "Improving the Performance of the T^2 Control Chart". *Quality Engineering*, 5, 4, pp.619-625 (1993).

4. Jensen, W. A., Birch, J. B., and Woodall, W. H. "High Breakdown Estimation Methods for Phase I Multivariate Control Charts". *Quality and Reliability Engineering International*, 23, 5, pp. 615-629 (2007).
5. Quesenberry, C. P.. "The Multivariate Short-Run Snapshot Q Chart". *Quality Engineering*, 13, 4, pp. 679-683 (2001).
6. Rousseeuw, P. J. and Leroy, A.. *Robust Regression and Outlier Detection*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ (2003).
7. Rousseeuw, P. J. and van Zomeren, B. C.. "Robust Distances: Simulations and Cutoff Values" in *Directions in Robust Statistics and Diagnostics*, Part II, edited by W. Stahel and S. Weisberg, Springer-Verlag, 34, pp.195-203 (1991).
8. Rousseeuw, P. J. and van Zomeren, B. C.. "Unmasking Multivariate Outliers and Leverage Points". *Journal of the American Statistical Association*, 85, 411, pp. 633-639 (1990).
9. Seber, G. A. F. and Wild, C. J.. *Nonlinear regression*. John Wiley & Sons, New York, NY (1989).
10. Sullivan, J. H. and Woodall, W. H.. "A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations". *Journal of Quality Technology*, 28, 4, pp. 398-408 (1996).
11. Vargas, N. J. A.. "Robust Estimation in Multivariate Control Charts for Individual Observations". *Journal of Quality Technology*, 35, 4, pp. 367-376 (2003).

Robust Estimation for Detecting Non - random Patterns in T^2 Control Charts

Jeh-Nan Pan^{**}, Hsiao-Chien Chen

Department of statistics, National Cheng Kung University

Abstract

Hotelling's T^2 control chart is used the sample mean vector and the sample covariance matrix to estimated parameter of process in Phase I. In fact, these estimators are affected by non-random patterns such as trend, process mean shift, or outliers. Recently, some scholars (Holmes and Mergen, Sullivan and Woodall) suggested to use robust estimators in the T^2 control chart. However, their proposed estimators are able to detect process mean shift and trend but are inefficient to detect outliers. On the other hand, Vargas's robust estimators in the T^2 control chart is able to detect multiple outliers but is inefficient to detect process mean shift and trend. Thus, one has to use two control charts for detecting the above-mentioned non-random patterns. Moreover, when the process is in-control, the simultaneous use of these two charts will increase the overall false alarm rate and it is inconvenient for a practioner to use two charts since he/she doesn't known when and what types of variation will occur. Combining both merits of the mean square successive difference matrix and the minimum volume ellipsoid (MVE) estimators, we proposed the novel robust estimators of location and dispersion for the T^2 control chart. The simulation results of signal probabilities show that our proposed robust estimators in the T^2 control chart is the most consistent one in detecting various non-random patterns. Finally, three numerical examples further demonstrate the usefulness of the T^2 control chart based on the novel robust estimators.

Keywords: multivariate control chart, non-random patterns, overall false alarm rate, robust estimation, signal probability.

* Correspondence: Department of Statistics, National Cheng Kung University, Tainan 70101, Taiwan, ROC.
Email: jnpan@mail.ncku.edu.tw